CONTENIDO

LISTA DE PROPIEDADES

CAPÍTULO 1

MATRICES Y VECTORES

En las siguientes exposiciones, se distinguen con *bastardillas* (itálicas) los conceptos que se incluyen en esta primera parte que concluye conjuntamente con los CONCEPTOS BÁSICOS (pg 06); cuando no se indique el número de la página en que tales conceptos aparecen, es que ya se explicaron con anterioridad, lo que prevalece en todo el libro.

MATRIZ

En términos generales, una **matriz** es cualquier arreglo rectangular de números, o de letras que los representan, como podría ser un mes cualquiera en el calendario, toda vez que se agreguen o eliminen cualesquiera números al inicio y/o fin del mes, para completar la forma rectangular; este ejemplo es el caso extremo en que no es posible definir operaciones sobre los números que la integran, de suerte que arrojen un resultado con significado, como sí es el caso en las matrices que se tratan en este texto, aquellas que provienen de grupos o *sistemas de ecuaciones lineales* (pg 03) en que pueden establecerse o definirse operaciones que conducen a la resolución del *sistema de ecuaciones lineales* de que se trate. Otro ejemplo podría ser los cuadros de calificación de los diferentes cursos de un grado cualquiera, de una institución educativa también cualquiera, pero naturalmente, las operaciones y las posibles propiedades de tales matrices son del todo diferentes a las presentadas en este libro. A continuación, a la derecha del signo igual, se ilustra la forma en que, en este texto, se escribe una matriz, la cual se encierra entre **paréntesis rectangulares** y se simboliza con una **letra mayúscula**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

En forma algebraica, se hace referencia a una matriz de "m" líneas por "n" columnas, de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Las letras dentro de los paréntesis representan valores numéricos de cualquier campo (ver CAMPOS NUMÉRICOS en Apéndice 1, pg 300) y constituyen los **elementos** de la matriz. Parece oportuno advertir que, en este texto, solamente se tratará con el campo de los **números reales**. Cuando se usa la segunda de las formas anteriores, más general respecto a la primera y denominada **matriz algebraica**, es necesario distinguir los valores que se anotan en una celda, de la posición de la celda misma en que se ubica tal valor, lo que se logra mediante la utilización de **subíndices** en ambos casos; el primer subíndice indica la línea y el segundo la columna, que corresponden a la posición o celda en que el valor, muchas veces distinguido algebraicamente con los mismos subíndices, se ubica. Por ejemplo a_{23}, es el valor en la posición correspondiente a la segunda línea y tercera columna (7 en la primera de las matrices anteriores). Sin embargo, este elemento "a_{23}" podría ser trasladado a, por ejemplo, la posición "32", ver Posición o celda en pg 07. Las matrices pueden tener diferente cantidad de líneas y columnas; una matriz de "m" líneas y "n" columnas es de **tamaño** mxn y, cuando m=n, se dice que la matriz es **cuadrada**. Así, son ejemplos de matrices, los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 11 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & 7 \\ -7 & 3 & 13 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3+4i & 2-7i \\ 7-5i & 2+3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/7 \\ 4/3 & 1/8 \end{bmatrix}$$

La matriz "A" es en el campo de los números reales (**R**) y de tamaño 4x3; la "B" en el campo de los números complejos (**C**) y tamaño 3x2; y la "C", en el campo (**Q**) de los números racionales y cuadrada de tamaño 2.

Para referirse a un elemento cualquiera de la matriz, en la línea "i" y columna "j" se usa la **notación** "a_{ij}". (ver también 1) Apéndice 2, pg 303) de modo que otra forma de escribir una matriz, por sus elementos, es utilizando el **lenguaje algebraico**:

$$A = [a_{ij}]$$

donde "i" varía de 1 a "m" y, "j" varía de 1 a "n" para cada valor de "i".

MATRICES Y ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** es toda ecuación integrada por cualquier cantidad "n" de *incógnitas* (pg 06) (x_1, x_2, …x_n) de primer grado, por ejemplo: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n = c$; también $ax = c$. Nótese que en ninguno de los sumandos aparecen el producto de una o más *incógnitas*, ni *incógnitas* con exponentes diferentes de uno, ya sean fraccionarios o enteros, negativos o positivos, ni tampoco aparecen las *incógnitas* como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc., en cuyo caso, ya no se consideran ecuaciones lineales. Se denomina **coeficientes** a los números que, en una ecuación lineal, aparecen multiplicando a las incógnitas y **valor aislado**, al valor "c" a la derecha del signo igual en ambos ejemplos. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto finito de las mismas y puede ser **no homogéneo** cuando al menos una de tales ecuaciones en el sistema, no es igual a cero, considerándose **homogéneo** al ser todas iguales a cero.

En el caso particular bajo estudio, aquel que corresponde a la resolución de ecuaciones lineales, una matriz se forma con los **valores numéricos** (coeficientes y el valor aislado cuando se incluya) de un sistema de ecuaciones lineales; por ejemplo, sea el siguiente *sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.*

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -8 \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 18 \\
9x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \\
8x_1 & + & 12x_2 & + & 4x_3 & = & 16
\end{array}$$

Con los valores numéricos de tal sistema, pueden formarse, entonces, dos clases de matrices;

a) **Matriz de coeficientes**: Incluye sólo los coeficientes de las incógnitas, ver matriz (A) siguiente.

b) **Matriz ampliada**: que incluye los *valores aislados*, separados con una línea vertical que substituye al signo igual en todas las líneas. Cuando el sistema es homogéneo, los *valores aislados* son todos iguales a cero, no se escriben y tampoco la línea vertical que substituye a los signos igual, pero no debe olvidarse que están, ambos, al extremo derecho de la matriz. Debe notarse, entonces, que cuando el sistema es homogéneo, las matrices de coeficientes y ampliada, son iguales. La matriz ampliada se ilustra como A_A, a continuación.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 9 & 12 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \text{(b)} \quad A_A = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & -8 \\ 3 & 6 & 2 & 18 \\ 9 & 12 & 3 & 21 \\ 8 & 12 & 4 & 16 \end{array}\right]$$

Se trata, entonces, de obtener procedimientos numéricos (operaciones) rutinarios (algoritmos) que permitan reducir a un mínimo el tiempo, y los errores, involucrados en el cálculo de las *resoluciones* (pg 06) del *sistema de ecuaciones lineales* representados por los elementos en la matriz, para lo que son de medular importancia las **operaciones elementales** sobre sus líneas, que se presentan en pg 08.

VECTORES

Si se define un **vector** como un conjunto cualquiera de números, o **elementos**, pertenecientes todos a un mismo campo, es posible armar vectores **ordenados** (con sus elementos en el estricto orden de los coeficientes que representan) con los coeficientes de las incógnitas de ecuaciónes lineales, incluidos o no los *valores aislados*. De tal manera que, los elementos incluidos en una línea de una matriz de coeficientes, constituyen un **vector** que puede escribirse como una línea o como una columna, denominándose, en cada caso, **vector línea o vector columna**; por ejemplo, la tercera línea de la matriz "A" anterior, que representa a los coeficientes de una ecuación lineal, puede escribirse indistintamente como vector línea (a) o como vector columna (b), según se indica a continuación:

$$\mathbf{a} = [9 \quad 12 \quad 3] \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

ocurriendo exactamente lo mismo con los vectores línea de "A_A". Así, **dos vectores son iguales**, cuando son el mismo (aunque uno se escriba como línea y otro como columna) es decir, cuando sus elementos son los mismos y en el mismo orden, de izquierda a derecha en la línea y de arriba hacia abajo en la columna. De la misma manera que las *matrices*, los vectores se encierran entre paréntesis rectangulares y se representan mediante una **letra minúscula en negritas**, como se ilustra en los ejemplos anteriores.

Debe tenerse presente que las columnas de una matriz cualquiera son conjuntos de números, y por ello pueden también ser consideradas como vectores columna de la matriz, vectores que no deben confundirse con los *vectores de coeficientes o ampliados* expresados como columnas, razón por la que, cuando se preste a confusión, debe expresarse claramente a qué tipo de vector se hace referencia. Así, la expresión (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m$ indica que se trata del conjunto de los "m" vectores línea, de "n" elementos cada uno, de una matriz de tamaño mxn, expresados como líneas o como columnas, en tanto que la expresión(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ indica que se trata del conjunto de los "n" vectores columna, de "m" elementos cada uno (que no constituyen coeficientes de ecuaciones en un sistema de ecuaciones) de una matriz de tamaño mxn, expresados como líneas o como columnas, debiéndose destacar que la diferencia entre (1) y (2) se manifiesta por el subíndice del último vector, forma de expresión que será de gran utilidad al tratar las combinaciones lineales en pg 52.

CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación se presentan, en orden alfabético, conceptos básicos que no han sido presentados con anterioridad Las palabras en *bastardillas* (itálicas), se refieren a definiciones que están incluidas en esta misma lista o con anterioridad.

Conformidad: Dícese de dos objetos matemáticos (escalar, vector o matriz) son conformes para una operación entre ellos, cuando, por la cantidad y/o disposición de sus elementos, ella es posible.

Diagonal: Elementos en la diagonal principal de una matriz cuadrada, es decir aquellos elementos que ocupan las posiciones en que los dos subíndices son iguales (a_{11}, a_{22},...a_{nn}).

Elementos homólogos: Elementos que en diferentes matrices o vectores, del mismo tamaño, ocupan las mismas posiciones, es decir, aquellas posiciones con idénticos subíndices.

Escalar: Al trabajar con *matrices* y *vectores*, que son conjuntos de números, se distingue de los mismos (matrices y vectores) a un número considerado aisladamente, cualquiera sea el campo a que pertenece, con el nombre de "escalar". Debe notarse que los *coeficientes* de las *incógnitas*, las *incógnitas* mismas y los *valores aislados*, son escalares que forman parte de un vector o de una matriz. En este texto, los escalares se representan generalmente con la letra "k".

Incógnitas y/o resoluciones: Son las cantidades escalares desconocidas "x_1, x_2, x_3, ... x_n", todas de primer grado, de una ecuación lineal o de un sistema de ecuaciones lineales. Debe notarse que las *incógnitas* constituyen también las *resoluciones*, una vez determinadas, por lo que puede considerarse que las *incógnitas*, al representar a las resoluciones, son también las resoluciones mismas. En este texto se representan generalmente con las letras finales del alfabeto, en minúscula.

Matriz diagonal (A_d): aquella *matriz cuadrada* cuyos elementos son todos iguales a cero, con excepción de aquellos en su *diagonal*.

Matriz fuente: aquella de la que se derivan otra u otras *matrices*.

Matriz nula: aquella cuyos elementos son todos iguales a cero. Se representa con [0].

Matriz original: aquella que corresponde directamente a los *valores numéricos* (pg 03) de un sistema de ecuaciones. Generalmente, la matriz *original* es también la *matriz fuente* para otras matrices que se deriven de ella, y estas, pueden ser fuente de otras.

Matriz unitaria o identidad (I): aquella *matriz diagonal* cuyos elementos en la diagonal son todos iguales uno. Si la matriz es de tamaño "n" se le simboliza como $\mathbf{I_n}$.

Posición o celda: Debe mantenerse claro que una *matriz* (o *vector*) incluye celdas o posiciones dentro de sí misma, que se distinguen con subíndices, pero los subíndices de las celdas no cambian, indican posiciones fijas, en tanto que los valores en ellas, identificados también con subíndices cuando están representados por letras (**valores algebraicos**) pueden tener subíndices diferentes a los de la posición que ocupan; así, la matriz "C" (de Celda, cuyas posiciones se identifican siempre como c_{ij}) se usará, cuando así convenga, para anotar en ella los valores algebraicos y aún numéricos, resultado de operaciones con *matrices* fuente. Esta circunstancia, no siempre notoria, debe mantenerse en mente, a efecto de comprender mejor las explicaciones vertidas en el texto, particularmente en la demostración de propiedades utilizando el lenguaje algebraico. Explicado de otra manera, el valor algebraico de un elemento "a_{ij}" de una matriz, se ubica generalmente en la celda o posición "c_{ij}" que tiene los mismos subíndices, pero este no es siempre el caso cuando la matriz de que se habla es el resultado de una operación sobre una o más matrices.

Posiciones homólogas Posiciones o celdas de una o más matrices, o vectores, del mismo tamaño, que ocupan idéntica posición, es decir, los subíndices de su posición son iguales.

Resoluciones: Las resoluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones lineales, son los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación o sistema de que se trate, es decir, son aquellos valores que, al substituirlos en la ecuación, arrojan al lado izquierdo del signo igual, el mismo valor dado a la derecha (valor aislado) del mismo. Es muy importante notar que los valores $x_1, x_2, \ldots x_n$ representan a los valores de las resoluciones, por lo que se denominan *incógnitas* o *resoluciones*, según convenga.

Vector ampliado: Es aquel que, además de los coeficientes de las incógnitas, contiene al valor aislado, separado, o no, de los coeficientes, mediante una línea vertical, según convenga.

Vector nulo o cero: aquel cuyos elementos son todos iguales a cero. Se representa con "**0**"

Vectores numéricos y espaciales: Al simple conjunto de los *valores numéricos* (coeficientes y valor aislado cuando se incluya) de una ecuación lineal, se le distingue como **vector numérico** y son los considerados en este capítulo, en que también se distinguen simplemente como "vectores". Sin embargo, los "n" elementos de un vector pueden también considerarse como coordenadas de un "lugar geométrico", es decir, "puntos" en el espacio n–dimensional, o bien como componentes de vectores a los que en física representamos mediante flechas, a los que se distinguirá como **vectores espaciales** y se estudian a partir del Capítulo 5 (pg 154).
Vector unitario: aquel cuyos elementos son todos iguales a uno. Se representa con "**1**". Observe la diferencia con la *matriz unitaria*, cuyos valores no son todos iguales a uno.

OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE LAS LÍNEAS DE UNA MATRIZ

Son aquellas que, realizadas sobre los vectores línea, de coeficientes o ampliados, de una matriz, no alteran las resoluciones del sistema de ecuaciones que la matriz representa. Dado que tales vectores línea representan siempre a un sistema de ecuaciones lineales, las operaciones elementales son aquellas operaciones que en álgebra elemental se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones mediante el método de **eliminación de incógnitas**, consistente en: multiplicar una ecuación por el coeficiente, en otra ecuación, de la incógnita a eliminar, y multiplicar esta otra ecuación, por el coeficiente de la misma incógnita en la primera ecuación, obteniéndose dos nuevas ecuaciones que, al restarse, dan lugar a una tercera ecuación en que la incógnita queda eliminada.

Desde la aritmética elemental se acepta el axioma de que, "si de ambos lados de una igualdad se efectúan operaciones iguales, la igualdad subsiste", axioma que permite definir las siguientes dos operaciones elementales.

1) Si en una ecuación cualquiera, homogénea o no, se multiplican ambos lados de la igualdad por una constante escalar cualquiera, diferente de cero (al multiplicarla por cero, desaparece y altera las resoluciones de ella y/o del sistema al que pertenece. Como se verá e el capítulo 2) la

igualdad se mantiene, por lo que las resoluciones de esa ecuación y las del sistema a que pertenece, no varían, lo que se demuestra a continuación: En la segunda de las siguientes ecuaciones se muestra la primera de ellas multiplicada, en ambos lados de la igualdad, por un valor escalar constante "k", y en la tercera, que la igualdad subsiste:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = a$$

$$ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + ka_{13}x_3 + \ldots ka_{1n}x_n = ka \quad (1)$$

$$k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n) = ka$$

De esta manera, la multiplicación, por una constante, en ambos lados de la igualdad de una ecuación, no altera las resoluciones de tal ecuación, ni las del sistema de ecuaciones al que pertenece.

Puede afirmarse, entonces, que si una línea de una matriz se multiplica por una constante, el valor de las resoluciones del sistema no se altera. Debe notarse que la multiplicación sucesiva, por una constante, de una ecuación tras otra, de aquellas en un sistema de ecuaciones, o de una línea tras otra de la matriz correspondiente, aun cuando dichas constantes sean diferentes para cada ecuación o línea, tampoco alterará el valor de las resoluciones del sistema.

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 19 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & + & 4x_4 & = & -13 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Cuyas resoluciones son: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = 3$

Multiplíquese la tercera de ellas por tres y se obtiene:

$$15x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 9$$

substitúyanse las resoluciones en esta nueva ecuación y obtendremos la igualdad:

$$30 + 6 - 36 + 9 = 9$$

$$9 = 9$$

Es decir, si se substituye esta nueva ecuación por la tercera ecuación en el sistema, las resoluciones del sistema siguen siendo las mismas, puesto que continúan satisfaciendo también a todas las demás.

2) De la misma manera, si una de las ecuaciones del sistema se suma con otra, es decir, si de los dos lados de la igualdad constituida por una ecuación cualquiera, se suman los valores en posiciones homólogas, a ambos lados de otra ecuación, la igualdad subsiste, o sea, se obtiene una tercera ecuación cuyas resoluciones son las mismas que las de las dos originales, como se prueba a continuación: Sea por ejemplo:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = c_2 \\ \hline (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 + (a_{1n} + a_{2n})x_n = c_1 + c_2 \end{array}$$

La última ecuación muestra que los valores x_1, x_2, $\ldots x_n$, continúan siendo las resoluciones de la ecuación obtenida al sumar las dos primeras, puesto que la igualdad se mantiene.

Ejemplo: En el mismo sistema anterior, sumemos las ecuaciones dos y tres, así:

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 4x_4 = -13 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ \hline 7x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -10 \end{array}$$

substituyendo las mismas resoluciones ($x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = 3$) en esta nueva ecuación (suma) se obtiene la igualdad:

$$14 + 5 - 44 + 15 = -10$$

$$-10 = -10$$

Es decir, si se substituye una cualquiera de las dos ecuaciones sumadas, por la suma de ellas, las resoluciones del sistema siguen siendo las mismas.

Considerando simultáneamente las dos propiedades anteriores, podemos establecer que "si el producto de una ecuación por una constante se suma a otra ecuación, o al producto de ésta por otra constante (igual o diferente), con el propósito de eliminar incógnitas para determinar las resoluciones de un sistema de ecuaciones, el sistema de ecuaciones no se altera" y se obtendrán las resoluciones del sistema original, experiencia que ya conocíamos desde el álgebra elemental y que permite establecer lo siguiente:

Como las matrices se obtienen de los coeficientes y el valor aislado de un sistema de ecuaciones, se establece, entonces, que las **operaciones elementales sobre las líneas de una matriz** son:

1) El cambio de lugar de una línea cualquiera dentro de la matriz.
2) La multiplicación de una línea cualquiera por una constante escalar diferente de cero.
3) La adición de una línea cualquiera a otra.
4) La adición de una línea, o su producto por una constante escalar, a otra línea o al producto de esta por otra, o la misma, constante escalar.

Y no alteran el valor de las resoluciones del sistema de ecuaciones que la matriz representa.

Tales operaciones son válidas para matrices de coeficientes (sistemas homogéneo de ecuaciones) y ampliadas (sistemas no homogéneo de ecuaciones). En otros textos, a las operaciones elementales se les denomina también "transformaciones elementales", aquí se evitará tal práctica, para evitar confusión con otra clase de transformaciones.

RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS

1) Si x_1, x_2, …x_n, son resoluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo, también los son sus productos por una misma constante escalar kx_1, kx_2, …kx_n, ya que si se substituyen dichas resoluciones en una cualquiera de las ecuaciones del sistema se obtiene:

$$a_{11}(kx_1) + a_{12}(kx_2) + \dots a_{1n}(kx_n) = 0$$

o, factorando:

$$k(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n) = 0$$

y dividiendo ambos lados por k:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = 0$$

que es la ecuación original, lo que demuestra que la primera de las ecuaciones anteriores se cumple y por tanto el producto de una resolución por una constante escalar, es también resolución de cada ecuación y por tanto del sistema.

Si el sistema es no homogéneo el valor aislado no se altera porque no contiene resoluciones, en tanto que aquel a la izquierda del signo igual sí se modifica, perdiéndose la igualdad.

2) Si x_1, x_2, …x_n, y y_1, y_2, …y_n son dos diferentes resoluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo, también lo es su suma, (x_1+y_1), (x_2+y_2), … (x_n+y_n) ya que si se substituyen dichas resoluciones en una cualquiera de las ecuaciones del sistema se obtiene:

$$a_{11}(x_1+y_1) + a_{12}(x_2+y_2) + \dots a_{1n}(x_n+y_n) = 0$$

operando: $$a_{11}x_1 + a_{11}y_1 + a_{12}x_2 + a_{12}y_2 + \dots a_{1n}x_n + a_{1n}y_n = 0$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n) + (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{1n}y_n) = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

lo que demuestra que la primera de las ecuaciones de este grupo se cumple y por tanto, la suma de dos o más resoluciones es también resolución de cada ecuación y por tanto del sistema.

Tal situación no se presenta si el sistema es no homogéneo pues en tanto el valor aislado no se altera, aquel a la izquierda del signo igual se modifica, perdiéndose la igualdad.

OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE LAS COLUMNAS DE UNA MATRIZ

Las mismas operaciones elementales descritas para las líneas de una matriz (ver punto anterior) pueden aplicarse a las columnas de una matriz, pero con propósitos diferentes a la resolución de ecuaciones, pues alteran las resoluciones de las mismas. Sus aplicaciones se conocerán en el transcurso del estudio.

MATRIZ EQUIVALENTE POR LÍNEAS (COLUMNAS)

En general, si se aplican una o más operaciones elementales a las líneas de una matriz, se obtiene una nueva matriz que es equivalente o tiene las mismas resoluciones que la primera; se dice entonces que ambas matrices son equivalentes por líneas. Cuando las operaciones elementales se aplican a las columnas de una matriz, las resoluciones se alteran y la matriz resultado es equivalente para otras aplicaciones distintas de la resolución de ecuaciones, como se verá más adelante.

NOMENCLATURA PARA LAS OPERACIONES ELEMENTALES

Una operación elemental sobre una línea o columna se indicará con las letras L o K, respectivamente. La siguiente tabla resume las abreviaturas posibles en esta nomenclatura:

OPERACION	CONCEPTO	OP. INVERSA
L_{st} o K_{st}	Intercámbiense las líneas (colunas) "s" y "t".	L_{ts} o K_{ts}
$L_s(q)$ o $K_s(q)$	Multiplíquese la línea (columna) "s" por "q"	$L_s(1/q)$ o $K_s(1/q)$
$L_{st}(q)$ o $K_{st}(q)$	A la línea (columna) "s" súmese "q" veces la línea (columna) "t".	$L_{st}(-q)$ o $K_{st}(-q)$

Las operaciones inversas a las de la columna a la izquierda, se muestran en la columna a la derecha; debe notarse que una operación es inversa de la otra y viceversa.

Una operación cualquiera puede deshacerse o anularse aplicando su operación inversa.

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON VECTORES

Multiplicación de dos vectores (ax):

Una sola ecuación lineal ($a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = a$) puede representarse como el producto de dos vectores, uno "**a**" formado por los coeficientes de las incógnitas y otro "**x**" formado por las incógnitas (resoluciones) mismas, y escribirse en la forma:

$$\mathbf{ax} = a$$

esto permite definir la multiplicación entre dos vectores, pues, si substituimos **a** y **x** por su valor, determinado como se explicó en el párrafo anterior, se obtiene:

$$[a_1\ a_2 \ldots a_n][x_1\ x_2 \ldots x_n] = a$$

Al efectuar la multiplicación, debemos obtener la ecuación lineal original y ello solamente se logra al sumar el producto de los elementos en las posiciones homólogas en ambos vectores, es decir:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = a$$

que puede también expresarse

$$\mathbf{ax} = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a$$

donde los subíndices "k", que varían de "1" a "n", indican la posición de cada elemento en el vector correspondiente. Ello permite establecer que *el producto* (un escalar "a") *de dos vectores, es igual a la suma de los productos de sus elementos homólogos*.

Debido a que el producto (resultado de la multiplicación) de dos vectores es un escalar, se le llama **producto escalar**, también se le llama **producto interior euclidiano** o solamente **producto euclidiano** o solamente **producto interior** y finalmente, cuando n=2 y n=3, se le llama **producto punto**.

Ejemplos:

1) [3, –5, 4, 0][7, 0, –9, 2] = 21–0–36+0 = –15
2) [0, –5, 4, 0][7, 0, 0, 2] = 0 – 0 + 0 + 0 = 0
3) [3, –5, 4, 2][6, 10, 12, –8] = 18–50+48–16 = 0

Observaciones:

1) Para que la multiplicación sea posible, es decir, **definida o conforme**, se requiere que los vectores tengan ambos la misma cantidad de elementos, o sea, sean del mismo tamaño.
2) El producto de dos vectores es un escalar, en este caso "a".
3) Que el producto de dos vectores sea cero, no implica que tan siquiera uno de ellos contenga algunos elementos iguales a cero, véase ejemplo 3) anterior, menos aún que uno sea nulo.
4) La multiplicación de un vector cualquiera por el **vector nulo** arrojará un resultado igual a cero.
5) La multiplicación de un vector cualquiera por el **vector unitario** arrojará un resultado igual al primero de ellos.

6) En la ecuación $3x_1 – 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$, una de cuyas resoluciones es: $x_1 = 6$; $x_2 = 10$; $x_3 = 12$; $x_4 = –8$, pueden armarse los vectores de los coeficientes y los de las incógnitas, así:

$$[3, –5, 4, 2][x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$$

cuyo producto, como ya vimos es la ecuación misma. Si se substituyen las incógnitas por sus valores dados en las resoluciones, se obtienen los vectores del ejemplo 3, cuyo producto satisface la ecuación.

7) Si se invierte la posición de los vectores en los tres ejemplos, se notará que el resultado (producto) no se altera, es decir: **ab** = **ba** = a, con lo que se prueba la **ley conmutativa en la multiplicación de vectores** (ver cuadro en pg 19).

8) **ac** = **bc** no necesariamente implica **a** = **b**, lo que se muestra a continuación:
La expresión inicial puede también escribirse como **ac** – **bc** = 0; si se substituye cada vector por sus elementos y se efectúan las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\mathbf{ac} – \mathbf{bc} = [a_1, a_2, \ldots a_n]\ [c_1, c_2, \ldots c_n] – [b_1, b_2, \ldots b_n]\ [c_1, c_2, \ldots c_n] = 0$$

$$\mathbf{ac} – \mathbf{bc} = [a_1c_1 + a_2\, c_2 + \ldots a_n\, c_n] – [b_1c_1 + b_2\, c_2 + \ldots b_n\, c_n] = 0$$

$$\mathbf{ac} – \mathbf{bc} = [(a_1 – b_1)c_1 + (a_2 – b_2)c_2 + \ldots (a_n – b_n)c_n] = 0$$

Es fácil observar que, para que la igualdad se cumpla, no necesariamente $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $\ldots a_n = b_n$, pues cada sumando puede ser negativo o positivo y su suma puede ser igual a cero, es decir, que la suma sea cero no implica que **a** = **b**, como se muestra en el siguiente ejemplo numérico:

Sea **a** = [1, 2, 3, 4]; **b** = [2, 2, 6, –2.5]; **c** = [4, 5, 3, 2];

entonces, **ac** = (4+10+9+8) = 31, y **bc** = (8+10+18–5) = 31

es decir: **ac** = **bc**, pero **a** ≠ **b**.

Suma de vectores (a + b):

Como se demostró en OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE LAS LÍNEAS DE UNA MATRIZ, pg 08, la suma de dos ecuaciones (con la misma cantidad de incógnitas) y la ecuación resultado tendrá las mismas resoluciones que las de los sumandos; sean las dos ecuaciones siguientes:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = a$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \dots b_nx_n = b$$

al sumarlas se obtiene: $(a_1+ b_1)x_1 + (a_2+ b_2)x_2 + \dots (a_n+ b_n)x_n = a + b$

Si formamos ahora los vectores de los coeficientes en las tres ecuaciones anteriores, e indicamos la suma, podemos establecer que:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1, a_2, \dots a_n] + [b_1, b_2, \dots b_n] = [a_1+ b_1, a_2+ b_2, \dots a_n+ b_n]$$

lo que permite establecer que *la suma de dos vectores es igual a otro vector en que cada elemento es igual a la suma de los elementos homólogos, en los dos primeros*. En forma algebraica puede expresarse:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

Ejemplos:

1 $[3, -5, 4, 0] + [7, 0, -9, 2] = [10, -5, -5, 2]$

2 $[0, -5, 4, 0] + [7, 0, 0, 2] = [7, -5, 4, 2]$

3 $[3, -5, 4, 2] - [3, -5, 4, 2] = [0, 0, 0, 0] = \mathbf{0}$

Observaciones:

1) para que la suma sea posible, es decir, **definida** o **conforme**, se requiere que los vectores tengan ambos la misma cantidad de elementos.
2) la suma de dos vectores es otro vector.

3) la suma del **vector nulo** a otro vector cualquiera, dará un vector igual a éste.
4) La substracción de dos vectores se efectúa de la misma forma que la suma, pero previamente debe cambiarse de signo a todos los elementos del vector substrayendo (ver ejemplo 3 anterior).
5) Las tres ecuaciones al inicio de este tema (suma de vectores) pueden escribirse como el producto de dos vectores, en la forma que se presentó al inicio del tema anterior Multiplicación de dos vectores, pg 14) de la siguiente manera: $\mathbf{ax} = a$; $\mathbf{bx} = b$; $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{x} = a + b$; y su suma así:

$$\mathbf{ax} + \mathbf{bx} = a + b = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{x}$$

que prueba la **ley distributiva para la multiplicación de dos vectores** (ver cuadro pg 19)

6) Nótese que: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots a_n + b_n]$

$$= [b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3, \ldots b_n + a_n] = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

y se prueba, además, **la ley conmutativa para la adición de vectores** (ver cuadro pg 19).

Multiplicación de un vector por una constante escalar (ka)

Los dos lados en la igualdad de una ecuación lineal pueden multiplicarse por una constante escalar "k", distinta de cero, sin alterar las resoluciones de la ecuación, ni las del sistema a que pertenece, ver 1), pg 08, ello equivale a multiplicar por dicha constante, todos los elementos del vector que le corresponde. Si se trata de una ecuación no homogénea, el vector incluye el valor aislado y si se trata de una ecuación homogénea, obviamente el vector incluye sólo los coeficientes de las incógnitas, pues el valor aislado es cero que no se escribe.

Así, *para multiplicar un vector por una constante, o viceversa, basta multiplicar cada uno de sus elementos por la constante, es decir:*

$$k\mathbf{a} = k[a_1, a_2, \ldots a_n] = [ka_1, ka_2, \ldots ka_n]$$

$$= [a_1k, a_2k, \ldots a_nk] = [a_1, a_2, \ldots a_n]k = \mathbf{a}k$$

Con lo que además, se prueba la **ley conmutativa en la multiplicación de un vector por una constante escalar** (ver cuadro más abajo).

Ejemplo: $8.2[3, 0, 4, -5] = [24.6, 0, 32.8, -41]$

Observación:

1) La multiplicación de un vector por un escalar es siempre **definida** o **conforme**, y es siempre otro vector

RESUMEN DE LEYES QUE RIGEN LA MULTIPLICACIÓN Y ADICIÓN DE VECTORES

Nótese que si **a** o **b** es igual a cero, **ab** = 0 pero si ninguno de los dos vale cero, **ab**≥0. Las otras propiedades como **a** + **0** = **0** + **a** = **a**; **0a** = **a0** = 0; **a** + (–**a**) = **a** – **a** = **0**, se pueden comprender fácilmente y son tan obvias, al conocer las operaciones entre vectores, que pareció innecesario incluirlas en la tabla resumen siguiente, para evitar confusión.

ley	en la adición	en la multiplicación
conmutativa	**a** + **b** = **b** + **a**	**ab** = **ba**; k**a** = **a**k
asociativa	(**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)	**a**(**bc**) ≠ (**ab**)**c**; (k**a**)**b** = k(**ab**)
distributiva	**a**(**b** + **c**) = **ab** + **ac**	
distributiva con escalares	k(**a** + **b**) = k**a** + k**b** **a**(k + k') = **a**k + **a**k'	

Las letras en negrillas representan "vectores", las otras "escalares"

ac = **bc**, no implica que **a** = **b**. Ver observación 8), pg 16

ab = 0 no implica que **a** o **b** sean vectores nulos, ver Observación 3), pg 15.

Conformidad: los vectores que se suman o multiplican deben ser del mismo tamaño

DEMOSTRACIÓN DE LAS LEYES ANTERIORES

Se probaron ya las leyes conmutativas, tanto para la multiplicación (7), pg 16, como para la adición de vectores (6), pg 18, así como la ley conmutativa para la multiplicación de un vector por una constante escalar, pg 19 y la ley distributiva para la multiplicación de vectores se prueba en (5), pg 18; a continuación se prueban las que hacen falta.

Ley Asociativa en la Adición: Supóngase los vectores siguientes, todos con "n" elementos:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n] + [c_1, c_2 + \ldots c_n]$$

$$= [a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, \ldots a_n + b_n + c_n]$$

$$= [a_1, a_2, \ldots a_n] + [b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots b_n + c_n] = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Ley Asociativa en la Multiplicación:

a) <u>Entre vectores</u>: Supóngase los vectores siguientes, todos con "n" elementos:

$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = \mathbf{a}s$ donde "s" es el escalar resultado de $\mathbf{bc}$

$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = t\mathbf{c}$ donde "t" es el escalar resultado de $\mathbf{ab}$;

obviamente $s \neq t$ y como $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$, lógicamente $\mathbf{a}s \neq t\mathbf{c}$, o sea,

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$$

b) <u>Entre vectores y escalar</u>: En los vectores siguientes, todos con igual cantidad "n" de elementos:

$$(k\mathbf{a})\mathbf{b} = [ka_1, ka_2, \ldots ka_n][b_1, b_2, \ldots b_n] = [ka_1b_1 + ka_2b_2, + \ldots ka_nb_n]$$

$$= k\,[a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n] = k(\mathbf{ab})$$

Ley distributiva entre vectores y escalares:

a) <u>Entre escalar y vectores</u>: Si cada vector tiene igual cantidad "n" de elementos, entonces:

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n) = [k(a_1 + b_1), k(a_2 + b_2), \ldots k(a_n + b_n)]$$

$$= [ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2, \ldots ka_n + kb_n] = [ka_1, ka_2, \ldots ka_n] + [kb_1, kb_2, \ldots kb_n]$$

$$= k[a_1, a_2, \ldots a_n] + k[b_1, b_2, \ldots b_n] = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

b) Entre vector y escalares:

$$\mathbf{a}(k + k') = [a_1(k + k'), a_2(k + k'), \ldots a_n(k + k')] = [a_1k + a_1k', a_2k + a_2k', \ldots a_nk + a_nk']$$

$$= [ka_1, ka_2, \ldots ka_n] + [k'a_1, k'a_2, \ldots k'a_n] = k[a_1, a_2, \ldots a_n] + k'[a_1, a_2, \ldots a_n] = k\mathbf{a} + k'\mathbf{a}$$

OPERACIONES CON VECTORES Y MATRICES I

Multiplicación de una Matriz por un Vector (Ab)

Si al multiplicar el vector de los coeficientes por el vector de las incógnitas, e igualar el resultado con el valor aislado, se obtiene la ecuación original (ver Multiplicación de dos vectores, pg 14), al multiplicar cada línea de una matriz de coeficientes, por el vector de las incógnitas, e igualar el resultado con el valor aislado correspondiente, se obtendrá el sistema de ecuaciones lineales original, esto permite definir la multiplicación de una matriz por un vector, como *la multiplicación de cada una de las líneas de la matriz de coeficientes, por el vector*, escrito ya sea como línea o como columna; por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}$$

cuyo producto de la matriz de coeficientes por el vector de las incógnitas, puede plantearse de cualquiera de las dos formas siguientes, según que el vector de las incógnitas se escriba como línea o como columna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

(a) (b)

Si se multiplica ahora cada vector línea de la matriz por el vector de las incógnitas y el resultado se iguala a su respectivo valor aislado, (a la derecha del signo igual en la expresión anterior) se obtiene el sistema de ecuaciones original; naturalmente la rutina o algoritmo variará ligeramente si se prefiere la anotación (a). Por simple economía de espacio, aquí se preferirá, siempre que no se introduzca confusión, la anotación (b); como ilustración se presenta solamente el producto de la primera línea de la matriz por el vector de las incógnitas:

$$[a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}][x_1, x_2, \ldots x_n] = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n$$

Resultado que al igualarse con el valor **aislado** correspondiente, en esta caso c_1, arroja la primera ecuación del sistema original, es decir:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = c_1$$

Ejemplo: Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}$$

A continuación se presenta la matriz de coeficientes, el vector de las incógnitas, y el vector de los valores aislados, anotados en la forma ilustrada en (b) anterior. El resultado de multiplicar la matriz por el vector, reproduce exactamente el sistema de ecuaciones original, de donde se origina el procedimiento.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ahora, sean $x_1 = -1$; $x_2 = 7$; $x_3 = 1$, una resolución del sistema, al sustituir estos valores en la expresión anterior, y efectuar la multiplicación indicada, se obtiene la prueba de que efectivamente son resolución del sistema pues lo satisfacen.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x(-1) + & 1x7 + & 2x1 \\ 0x(-1) + & 1x7 + & 1x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + & 7 + & 2 \\ 0 + & 7 + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

1) Para que el producto sea **posible**, es decir, **conforme** o **definido**, es necesario que la cantidad de columnas "n" de la matriz de coeficientes, sea igual la cantidad "n" de elementos del vector.
2) El resultado será siempre un vector, con tantos elementos como líneas ("m") tenga la matriz multiplicada; véase, en el ejemplo, que el vector resultado es el de los valores aislados.
3) Cada valor en la celda "c_{ij}" del vector resultado, será igual al producto de cada vector línea de la matriz multiplicando "A", por el vector columna multiplicador **b**, o, algebraicamente:

$$[c_{ij}] = \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ik} b_{k1} \right] \quad \text{o} \quad [c_{ij}] = \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ik} b_{k} \right]$$

donde "i" varía de "1" a "m" (la cantidad de líneas de A) y para cada valor de "i", k varía de "1" a "n" (la cantidad de columnas de A, igual a la cantidad de elementos de **b**).

Nótese que esta definición es válida sin importar que el vector se escriba como línea o como columna.

4) Otra definición de este producto se presenta, subrayado, al final del tema siguiente, pg 25.

5) El producto de una matriz por un vector, no es igual al producto inverso de ambos, es decir, A**b** ≠ **b**A, como se demuestra más adelante en b), pg 34.

6) Como la multiplicación de una matriz por un vector consiste básicamente en la multiplicación de vectores, es válido extender la propiedad mencionada para vectores en 8) pg 16, a este producto, de modo que el que A**c** = B**c**, no necesariamente implica que A = B

7) Es importante notar que se ha separado el vector de valores aislados de la matriz ampliada por lo que, **de aquí en adelante**, la matriz a que se hace referencia en las multiplicaciones en que se involucre una matriz, es la matriz de coeficientes. Ver tema siguiente.

EXPRESIÓN GENERAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

La forma de escritura algebraica presentada en (a) y (b) del tema anterior (pg 22) puede escribirse mediante los símbolos de la matriz y los vectores involucrados, en la forma, también algebraica, que aquí se denomina **ecuación matricial** y que se presenta a continuación:

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

En la que "A" es la matriz de los coeficientes, **x** el vector de las incógnitas y **c**, el vector de los valores aislados. Si el sistema de ecuaciones es homogéneo, entonces, **c** = **0**. Si se efectúa la multiplicación indicada en (b) de la pg 22, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & a_{2n}x_n \\ \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$$

que es el mismo sistema original de ecuaciones (pg 21, final) y que también puede escribirse como el producto de los vectores columna de la matriz, por una constante escalar, constituida en este caso por las incógnitas, es decir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Al substituir cada vector columna de la matriz por su símbolo, se obtiene una nueva ecuación algebraica a la que aquí se denomina **ecuación vectorial**, dado que no incluye matrices:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{c}$$

Nótese que, en esta expresión, cada vector es un vector columna de la matriz "A", por lo que el último vector tiene el subíndice "n" (ver último párrafo pg 5) subíndice igual al del último elemento del vector **x**. Si el sistema es homogéneo, de nuevo, la ecuación anterior es igual a **0**.

Si se igualan ambas ecuaciones (matricial y vectorial) se obtiene una **importante** relación:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{c}$$

<u>Que permite establecer que el producto (un vector) de una matriz por un vector es igual a la suma de los productos de cada vector columna de la matriz, por cada uno de los elementos del vector.</u>

OPERACIONES CON VECTORES Y MATRICES II

Suma de dos matrices (A + B): Dado que una matriz es un conjunto de vectores línea, la suma de dos matrices es igual a la suma, uno a uno de los vectores línea que la integran, es decir, *es igual* *a una nueva matriz en que cada uno de sus elementos es igual a la suma de los elementos homólogos en las dos que se suman* (ver Suma de vectores, pg 17). Lógicamente para que sea conforme es necesario que las dos matrices sumadas sean del mismo tamaño, "mxn" y el resultado será otra matriz del mismo tamaño.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una constante por una Matriz (kA)

Si una matriz "A" se suma con ella misma "k" veces, cada elemento de la matriz resultado (del mismo tamaño que "A") es igual a "k" veces el elemento homólogo en la matriz fuente y la matriz fuente se ha multiplicado por "k". De modo que $kA = Ak = [ka_{ij}]$. Esta definición exige que "k" sea un entero, por lo que se brinda la siguiente opción:

Dado que una matriz es la reunión de varios vectores línea, la multiplicación de una matriz por una constante escalar (o viceversa), equivale a la multiplicación de todos sus vectores línea por dicha constante, ver Multiplicación de un vector por una constante escalar en pg 18.

Así *el producto de una constante por una matriz es igual a una nueva matriz cuyos elementos fueron todos multiplicados por la constante*, por lo que, si se escribe la matriz mediante sus "m" vectores línea, puede expresarse algebraicamente así:

$$kA = k[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m] = [k\mathbf{a}_1, k\mathbf{a}_2, \ldots k\mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m]k = Ak$$

o también: $$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = [a_{ij}k] = [a_{ij}]k = Ak$$

con lo que se prueba, además, la **Ley conmutativa para la multiplicación de una constante por una matriz** (ver cuadro en pg 33). Obviamente, esta operación es siempre conforme.

Multiplicación de dos Matrices

La multiplicación de dos matrices no puede relacionarse directamente con operaciones sobre un sistema de ecuaciones lineales, como ha sido el caso con todas las operaciones anteriores, es decir, han de considerarse como simples conjuntos de escalares arreglados en forma rectangular; sin embargo, las posibilidades que esta operación permite, que se comprenderán con el uso, la justifican de sobra.

El producto de la multiplicación de dos matrices será otra matriz $C = AB$, *en que cada elemento en la posición* c_{ij} *es igual al producto del vector línea* "i" *de* "A" *por el vector columna* "j" *de* "B".

Si se escriben la matriz A por sus "m" vectores línea y la matriz B por sus "n" vectores columna, este producto puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1j} \\ \mathbf{a}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{mj} \end{bmatrix} [\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \cdots \mathbf{b}_{in}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1j}\mathbf{b}_{i1} & \mathbf{a}_{1j}\mathbf{b}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{1j}\mathbf{b}_{in} \\ \mathbf{a}_{2j}\mathbf{b}_{i1} & \mathbf{a}_{2j}\mathbf{b}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{2j}\mathbf{b}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{mj}\mathbf{b}_{i1} & \mathbf{a}_{mj}\mathbf{b}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{mj}\mathbf{b}_{in} \end{bmatrix}$$

Donde las letras en los subíndices se utilizan sólo para determinar que los números se refieren a las líneas y a las columnas en las matrices A y B, respectivamente y en las que "m" es la cantidad de líneas de la matriz A, de tamaño mxp y "n" es la cantidad de columnas de la matriz B, de tamaño pxn, y mxn es el tamaño de la matriz producto. Debe notarse que para que la multiplicación sea conforme, la cantidad de elementos "p" de los vectores línea de A y columna de B, deben ser iguales, lo que equivale a decir que "la cantidad de columnas de A debe ser igual a la cantidad de líneas de B".

Ejemplo: Se presenta a continuación la multiplicación de dos matrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Observaciones:

1) Para que este producto sea **conforme**, es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de líneas de la matriz multiplicador, es decir, si la primera es de tamaño "mxp" la segunda debe ser de tamaño "pxn" para que los dos vectores a multiplicarse tengan la misma cantidad "p" de elementos.

2) La matriz resultado tendrá tantas líneas como la matriz multiplicando y tantas columnas como la matriz multiplicador, es decir, será de tamaño mxn. La siguiente expresión puede ayudar a recordarlo, por estar las dos letras "p" juntas:

$$(m\text{x}p)(p\text{x}n) = m\text{x}n$$

el tamaño de la matriz resultado queda indicado por las dos letras extremas en la expresión, es decir: "mxn"; si el producto se conmuta, se obtiene para BA (pxn)(mxp) que indica un producto no conforme, es decir, que AB sea conforme, no implica que BA lo sea, salvo el caso en que las matrices sean cuadradas.

3) Las **leyes** de operación de las matrices (ver cuadro en pg 33) son las mismas que aquellas para los vectores, con excepción de que **a**(**bc**) ≠ (**ab**)**c**, en tanto que A(BC) = (AB)C, y **ab** = **ba**, en tanto que, en general, AB ≠ BA, aun cuando ambas matrices sean cuadradas, es decir, ambas operaciones (AB y BA) sean conformes. Esto obliga a referirnos a la multiplicación de matrices de una manera especial. Se dice que en el producto AB, A **premultiplica** a B o que B **postmul-**

tiplica a A. A estas diferencias se debe que un vector no deba considerarse como una matriz de una sola línea.

4) Cada elemento en la celda "c_{ij}" de la matriz C = AB se obtiene como el producto escalar de un vector línea $\mathbf{a}_i$ de A, por un vector columna $\mathbf{b}_j$ de B (ver Multiplicación de una Matriz por un vector, pg 21), es decir, si:

$$C = AB$$

Entonces:

$$[c_{ij}] = [\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right]$$

donde "i" varía de "1" a "m" para cada valor de "j" que varía de 1 a "n"; además, para cada pareja de valores "ij", "k" varía de "1" a "p", donde "p" es el número de columnas de A, igual a la cantidad de líneas de B; al variar "k" se determina la posición del elemento en la línea "i" de A y simultáneamente la del elemento en la columna "j" de B, que se están multiplicando para obtener cada uno de los sumandos del elemento c_{ij} de C; por ejemplo, si k = 4, se estará multiplicando el cuarto elemento de la línea "i" en A por el cuarto elemento de la columna "j" en B, para obtener el cuarto sumando de c_{ij}.

Multiplicación de un Vector por una Matriz (bA)

Ha de notarse que este es un caso particular de la multiplicación de dos matrices. Efectivamente, si se considera al vector como una matriz línea, se escribe la matriz por sus vectores columna y se efectúa la multiplicación, se obtiene la expresión algebraica siguiente:

$$\mathbf{b}A = \mathbf{b}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots \mathbf{a}_n] = [\mathbf{b}\mathbf{a}_1, \mathbf{b}\mathbf{a}_2, \cdots \mathbf{b}\mathbf{a}_n] = \mathbf{c}$$

Donde **b** tiene una sola línea, es decir, es de tamaño 1xp, "n" es la cantidad de columnas de la matriz, de tamaño pxn, de modo que la matriz (vector) producto, el vector **c**. será de tamaño "1xn", ver 2) en pg 28. Debe notarse que para que la multiplicación sea conforme, la cantidad de elementos "p" del vector **b** debe ser igual a la cantidad de elementos de los vectores columna de la matriz, lo que equivale a decir que "la cantidad de elementos de **b** debe ser igual a la cantidad de líneas de A", de la misma manera que en la multiplicación de dos matrices, ver 1) en pg 28.

Ahora puede definirse este producto de la manera siguiente: *La multiplicación de un vector por una matriz será un vector* **c**, *en que cada elemento en la posición* c_{1j} *es igual al producto del vector* **b** *por el vector columna* "j" *de la matriz*, multiplicación que también puede expresarse, como el producto de dos matrices, de la manera siguiente, en que el vector resultado se escribe como columna:

$$\mathbf{b}A = [b_1 \quad b_2 \dots \quad b_p]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots & a_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_{11} + b_2a_{21} + \cdots b_pa_{p1} \\ b_1a_{12} + b_2a_{22} + \cdots b_pa_{p2} \\ \vdots \\ b_1a_{1n} + b_2a_{2n} + \cdots b_pa_{pn} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de un vector por una matriz puede también expresarse en otra forma algebraica:

$$[c_{1j}] = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{1k}a_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} b_k a_{kj}\right]$$

Donde "j" varía de 1 a "n" y para cada valor de "j", k varía de 1 a "p".

Ejemplo: Efectúese la siguiente multiplicación de un vector, escrito como columna, por una matriz (el resultado puede escribirse como línea o como columna):

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x3 & + & 5x4 & + & 2x2 \\ 3x(-2) & + & 5x(-1) & + & 2x5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ -1 \end{bmatrix}$$

CLASES DE MATRICES I

Matriz inversa: Cuando dos matrices cuadradas son tales que, $AB = BA = \mathbf{I}$, se dice que una cualquiera de ellas es inversa de la otra; así: $B = A^{-1}$, y $A = B^{-1}$.

Premultiplicando por "A " la primera de las expresiones anteriores ($B = A^{-1}$) o postmultiplicando por B la segunda de ellas ($A = B^{-1}$) en ambos casos, se obtiene AB como:

$$AB = AA^{-1} = B^{-1}B = \mathbf{I}$$

es decir, el producto de una matriz cualquiera y su inversa es igual a la matriz unitaria.

Las dos matrices siguientes son inversas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

pues, $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$; y $BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$

Más adelante, en el capítulo 4, MATRICES Y DETERMINANTES, se explican dos procedimientos para el cálculo de las matrices inversas, pgs 133 y 145. Debe notarse que las matrices que tienen inversa (no todas la tienen, como se verá posteriormente) son siempre cuadradas, de lo contrario uno de los dos productos (AB o BA) no sería conforme.

PRODUCTOS ESPECIALES DE MATRICES

Matriz diagonal por matriz cualquiera

Resulta de interés considerar el producto de una matriz diagonal A_d y de una unitaria "**I**", por una matriz cualquiera B, y a la inversa, una matriz cualquiera B por una diagonal y por una unitaria.

$$A_dB=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{33}b_{31} & a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \\ a_{44}b_{41} & a_{44}b_{42} & a_{44}b_{43} \end{bmatrix}$$

$$BA_d=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{33}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{33}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{33}b_{33} \\ a_{11}b_{41} & a_{22}b_{42} & a_{33}b_{43} \end{bmatrix}$$

Como ejercicio, el estudiante debe verificar ambas multiplicaciones. Nótese que si la matriz diagonal premultiplica, el producto es igual a la matriz multiplicador con cada línea multiplicada por el elemento en esa misma línea de la matriz diagonal y, si postmultiplica, el producto es igual a la matriz multiplicando, con cada columna multiplicada por el elemento en esa misma columna de la matriz diagonal. Si la matriz diagonal fuese **unitaria**, la matriz producto sería igual a la matriz B, en ambos casos, y de allí su nombre "matriz unitaria" pues, se comporta como la unidad, al no alterar las matrices que pre o postmultiplica.

Matriz diagonal por matriz diagonal

El producto de dos matrices diagonales, obviamente cuadradas y del mismo tamaño, es igual a una nueva matriz diagonal en que cada elemento es igual al producto de los dos elementos homólogos en las matrices multiplicadas:

$$A_dB_d = B_dA_d = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}b_{44} \end{bmatrix}$$

Obviamente, si una de las matrices fuera unitaria, el resultado sería igual a la otra matriz y si ambas fueran unitarias, el resultado sería otra matriz unitaria todas del mismo tamaño. Como ejercicio, el estudiante debe verificar la multiplicación anterior.

Potencias de una matriz

Por analogía con el álgebra elemental se establece la siguiente forma de expresión: $AA = A^2$; $AAA = A^3$, etc.; además, $A^2A^3 = A^5$.

RESUMEN DE LEYES PARA LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Nótese que si A o B son nulas, AB = [0] pero si ninguno de los dos es nula, AB ≠ [0]. Las otras propiedades como A + [0] = [0] + A = A; [0]A = A[0] = [0]; [0] – A = –A; A – A = [0]; **I**A = A**I** = A;A(–**I**) = –**I**A = –A son tan obvias que no se incluyen en la tabla siguiente, para evitar confusión.

ley	**en la adición**	**en la multiplicación**
conmutativa	A + B = B + A	AB ≠ BA[1,2]; A**b** ≠ **b**A; kA = Ak
asociativa	A + (B + C) = (A + B) + C	(kA)B = k(AB); A(BC) = (AB)C[2]
distributiva	A(B + C) = AB + AC	
distributiva con escalares	k(A + B) = kA + kB A(k + k') = Ak + Ak'	

las mayúsculas representan matrices, las negritas vectores y las minúsculas escalares

[1]AB = BA sólo en casos especiales como:

A = B; $A = B^{-1}$; A o B es nula o unitaria; A y B son diagonales, una de ellas es adjunta de la otra (ver Propiedad No 20, pg 142)

A**c** = B**c**, no implica que A = B, ver 5), pg 24.

AB = 0 no implica que A o B lo sean, o siquiera contengan elementos, iguales a cero

[2]Esta ley no es válida para vectores (cuadro pg 19), por lo que no puede decirse estrictamente que un vector sea una matriz de una sola línea o columna

Conformidad: En la suma: Las matrices deben ser del mismo tamaño;

En la multiplicación: Cantidad columnas de A = Cantidad líneas de B o sea (mxp) y (pxn)

DEMOSTRACIÓN DE LAS LEYES ANTERIORES

En las pruebas que siguen se evita el uso de la matriz "C" como tal, con objeto de no introducir confusión, pues se ha reservado como matriz de las celdas o posiciones:

Ley conmutativa en la Adición: Supóngase dos matrices del mismo tamaño, entonces:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A$$

Ley conmutativa en la multiplicación:

a) Entre dos Matrices cuadradas de tamaño "n": De no ser cuadradas, al conmutarlas, una de las dos multiplicaciones no es conforme

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] \neq \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right] = BA$$

La primera de estas expresiones (a la izquierda del signo desigual) indican el producto de los vectores línea de A por los vectores columna de B, en tanto que aquella a la derecha implica el producto de los vectores línea de B por los vectores columna de A, que obviamente no arrojarán el mismo resultado, es decir, los valores en las celdas homólogas de ambas matrices (AB y BA) no serán iguales. El producto del vector en la línea "i" de A por aquel en la columna "j" de B, no es igual al producto del vector en la línea "i" de B por aquel en la columna "j" de A. Sin embargo, por razones obvias, la igualdad se da en los siguientes casos especiales: Si A y B son iguales, si una es inversa de la otra, si ambas son diagonales o si una de ellas es nula o unitaria.

b) Entre una Matriz y un Vector: Si se compara el producto de la multiplicación de una matriz por un vector (3, pg 23) al lado izquierdo del signo de desigualdad en la expresión siguiente, y el producto inverso (pg 30) al lado derecho de dicho signo, se ve que el primero es igual a la multiplicación de las líneas de la matriz por el vector, mientras el segundo es igual a la multiplicación del mismo vector pero por las columnas (distintas a las líneas) de la matriz, por lo que los productos tienen que ser enteramente distintos.

$$\left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_k\right] \neq \left[\sum_{k=1}^{p} b_k a_{kj}\right]$$

c) <u>Entre una constante y una Matriz</u>: $kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = [a_{ij}k] = [a_{ij}]k = Ak$. Ver Multiplicación de una constante por una matriz, pg 26

Ley asociativa en la Adición:

$$A + (B + D) = [a_{ij}] + [b_{ij} + d_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + d_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [d_{ij}] = (A + B) + D$$

Ley asociativa en la Multiplicación:

a) <u>Entre escalares y matrices</u>:

$$k(AB) = k\left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} ka_{ik} b_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} (ka)_{ik} (b_{kj})\right] = (kA)B$$

b) <u>Entre Matrices</u>: $A(BD) = (AB)D$

Esta demostración es un poco larga y, con objeto de no provocar distracción respecto a lo que este capítulo se propone, se incluye como ejercicio No 4 en el Apéndice 2, pg 314.

Nótese que AD, DB, BA y DB, no son conformes, es el orden de multiplicación lo que las hace conformes, por lo que el mismo no puede alterarse. Siempre que haya conformidad entre los productos, esta ley puede extenderse a mayor número de matrices.

Ley distributiva entre Matrices: Sea A de tamaño mxp; B y D de tamaño pxn, entonces:

El producto A(B+D) es igual al producto de cada vector línea de A por cada vector columna de (B+D) es decir:

$\mathbf{a}_i[\mathbf{b}_j + \mathbf{d}_j]$ que, de acuerdo con la ley distributiva para vectores (cuadro pg 19) es igual a

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j + \mathbf{a}_i\mathbf{d}_j = AB + AD$$

Ley distributiva entre Matrices y escalares:

a) <u>Entre un escalar y varias Matrices</u>: Sean un escalar y dos matrices del mismo tamaño:

$$k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}]$$

Donde los subíndices iguales indican los elementos homólogos de cada matriz; entonces, es claro que dos números a_{ij} y b_{ij} pueden sumarse antes o después de multiplicarse por un factor común a ambos, obteniéndose en ambos casos, el mismo resultado, es decir:

$$k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}] = [ka_{ij} + kb_{ij}] = kA + kB$$

b) <u>Entre varios escalares y una Matriz</u>: Sean una matriz y dos escalares:

$$A(k + k') = [a_{ij}](k + k')$$

Donde a_{ij} representa a cada elemento de A, entonces un número a_{ij} puede multiplicarse por otros dos y luego sumarse, o multiplicarse por la suma de esos otros dos, obteniéndose el mismo resultado, es decir:

$$A(k + k') = [a_{ij}](k + k') = [a_{ij}]k + [a_{ij}]k' = Ak + Ak'$$

CLASES DE MATRICES II

Al igual que algunas operaciones (como la multiplicación de dos matrices) la siguiente clasificación no goza necesariamente de una razón explicable, responden a la necesidad del lenguaje matricial de referirse a ellas, en forma rápida, sin describirlas cada vez. Así, atendiendo a su forma y las características de sus elementos, se distinguen las siguientes clases de matrices:

Matrices iguales: Dos matrices son iguales si son idénticas, es decir si los valores en sus posiciones homólogas son iguales; dicho de otra manera, una matriz sólo es igual a sí misma.

Matriz Transpuesta: Una matriz cualquiera (ampliada o no) puede expresarse también por medio de sus vectores línea, equivalentes a los coeficientes de un sistema de ecuaciones, escritos como columnas (pg 05, en Vectores) en cuyo caso se dice que una, cualquiera de ellas, es **transpuesta** de la otra. A continuación se muestran las dos matrices de las pgs 01 (final) y 02 (principio) y sus correspondientes transpuestas, que se distinguen con la letra "t" como superíndice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En lenguaje algebraico, A^t, se lee "transpuesta de A" y se expresa: $[a_{ji}] = [a_{ij}]^t$; así, un elemento "a_{ij}" en la posición c_{ij} de A, se encontrará en la posición c_{ji} de A^t, por lo que también es válida la siguiente relación entre los elementos de ambas:

$a_{ij}^t = a_{ji}$, donde a_{ji} y a_{ij}^t representan ambos a cada elemento de la matriz transpuesta.

Debe notarse que $[a_{ij}]^t$ indica que la matriz ha de transponerse, en tanto que $[a_{ji}]$ es la matriz ya transpuesta. (más detalles sobre esta nomenclatura en 1), Apéndice 2, pg 303).

Observaciones

1) En las celdas de la matriz transpuesta, "j" significa ahora la línea e "i" la columna que definen <u>su posición</u>; es decir, su significado depende de la posición, la primera en el subíndice es línea y la segunda columna y en ambas se encuentra el elemento a_{ij}.

2) En la matriz fuente, "m" es la cantidad de líneas y "n" la de columnas, de suerte que si la matriz fuente "A" es de tamaño mxn, la transpuesta será de tamaño nxm.

Matriz simétrica: Aquella matriz cuadrada que es igual a su propia transpuesta.

$$A = A^t = A^s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Es decir, $A = A^t$ o $[c_{ji} = c_{ij}]$, en que la posición externa de los paréntesis rectangulares indican que la igualdad es entre los elementos en dos diferentes posiciones o celdas de una misma matriz, no entre los de una matriz y los de su transpuesta.

Obsérvese de nuevo que, cuando se hace referencia a posiciones de celdas, tanto "i" como "j" pueden indicar línea o columna, dependiendo de su posición en el subíndice

Matriz oblicua o antisimétrica: Matriz cuadrada en que los elementos en sus posiciones transpuestas tienen distinto signo. La siguiente matriz es la oblicua de la simétrica anterior

$$A^{as} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & -a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & -a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, $A = -A^t$ o $[c_{ij} = -c_{ji}]$, en que la posición de los paréntesis rectangulares indican que la igualdad es entre los elementos en dos distintas posiciones de una misma matriz. Los elementos en la diagonal son todos ceros, porque esas posiciones son las transpuestas de sí mismas y el único número con la propiedad de ser igual a sí mismo cambiado de signo, es cero; en c_{22}, por ejemplo, en la misma casilla habría que escribir a_{22} y $-a_{22}$.

Matriz triangular: Matriz cuadrada cuyos elementos arriba o debajo de la diagonal son todos ceros, denominándose triangular inferior y triangular superior respectivamente.

$$\underset{\text{triangular inferior}}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{triangular superior}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}$$

Matriz canónica o escalonada reducida: Mediante la aplicación repetida de las OPERACIONES ELEMENTALES (**pg** 08) es posible modificar el aspecto de una matriz de cualquier tamaño, hasta reducirla a canónica, sin alterar el valor de las resoluciones de las ecuaciones que representa, por lo que se dice que es **equivalente por líneas** a la matriz fuente y a todas las intermedias, obtenidas al aplicar las operaciones elementales (ver también Matriz Equivalente por líneas, pg 13).

Las características de una matriz canónica son:

1) El primer elemento con valor significativo en cada línea es "1" y se denomina **elemento directriz**; a la columna que lo contiene se denomina **columna directriz** y todos los demás elementos en dicha columna son ceros. Si "r" (de "rango", un concepto (pg 54) con el que conviene comenzar a familiarizarse aunque se estudiará formalmente más adelante, en pg 109) denota el número de columnas directrices. En una matriz de tamaño mxn hay "r" columnas directrices y "n – r" columnas no directrices.

2) El elemento directriz en cada línea se encuentra ubicado a la derecha de los elementos directrices en las líneas arriba de ella.

3) Las líneas con solamente ceros, se ubican al final de las que tienen elemento directriz.

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-2&-5\\0&0&1&6&7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&4&0&3&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Las matrices A, B y D, son canónicas, pero la C no cumple los requisitos 2 y 3 hasta que sus líneas se reordenen, mediante operaciones elementales sobre sus líneas, hasta ser igual a D. A veces, la matriz canónica es igual a la matriz identidad, o, dicho de otra manera, una matriz identidad es siempre canónica

Matriz escalonada: Es una matriz alcanzada durante el proceso de cálculo de la canónica y cumple con todos los requisitos de ésta, excepto que los demás elementos en las columnas directrices no son necesariamente ceros; a continuación dos ejemplos;

$$\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}&0\\0&1&a_{23}&0&a_{25}&a_{26}\\0&0&1&a_{34}&a_{35}&a_{36}\\0&0&0&1&a_{45}&a_{46}\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&a_{12}&0&a_{14}&a_{15}&a_{16}\\0&1&a_{23}&a_{24}&0&a_{226}\\0&0&0&1&a_{35}&a_{36}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Matriz idempotente: Una matriz (cuadrada) tal que $A^z = A$, para cualquier valor entero de "z". Todas las matrices unitarias son idempotentes.

$$\text{La matriz}\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\text{es idempotente}$$

$$\text{porque: } A^2 = A^3 = A^z = \begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$$

Matriz impotente (en inglés: nil-potent): Una matriz cuadrada tal que $A^z = 0$, para "z" igual a cierto valor entero y todos los enteros mayores que él, es impotente de **índice** "z".

$$\text{La matriz } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ es impotente de índice 3, porque}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices triangulares con los elementos diagonales iguales también a cero, son todas impotentes de índice igual al tamaño de la matriz, Así, la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es impotente de índice 4, porque:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{24}+a_{13}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12}a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12}a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES I

Antes de estudiar esta parte, debe estudiarse concienzudamente el Apéndice 2 REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE LAS OPERACIONES CON VECTORES Y MATRICES (pg 303) y no debe olvidarse que c_{ij} es una posición en la matriz C, en la que se anota, por ejemplo, el resultado de una operación entre otras matrices; todas las otras letras con subíndices son los números en las posiciones indicadas por c_{ij}.

Propiedad No 1: *La matriz transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las transpuestas de cada una de ellas*. Esta Propiedad no requiere demostración alguna, ya que dos números pueden sumarse y después trasladarse a otra posición, o trasladarse previamente a esa posición y luego sumarse, el valor en la posición a que se trasladaron será el mismo en ambos casos. Escribiéndolo algebraicamente:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Propiedad No 2: *La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las transpuestas de cada una; en orden inverso*, es decir:

$$(AB)^t = B^tA^t$$

A la celda c_{ij} del producto $C = (AB)^t$, le corresponde (ver última ecuación de 7), Apéndice "2", pg 311) el siguiente valor:

$$\text{para } C = (AB)^t: \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \qquad (1)$$

Por otro lado, a la celda c_{ij} del producto $C = A^t B^t$, de acuerdo con la segunda ecuación de 4, Apéndice 2, pg 306, le corresponde el valor:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} b_{jk}$$

Lo que significa que los elementos del producto conmutado $B^t A^t$ son:

$$\text{para } C = B^t A^t: \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk}$$

Que es igual a la expresión (1) anterior ya que el orden de los factores no altera el producto, con lo que se confirma que:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

No debe olvidarse que la matriz A debe ser de tamaño mxp, y la B, de tamaño pxn, para que las operaciones sean conformes.

Propiedad No 3: *La suma de una matriz cuadrada y su transpuesta es una matriz simétrica*. Si no es cuadrada la suma no es conforme porque la transpuesta será de diferente tamaño.

$$C = A + A^t = A^s$$

Los valores en cada celda de C, serán: $c_{ij} = a_{ij} + a^t_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, ver 1, Ap 2, pg 303

En la celda transpuesta c_{ji} de tal matriz C habrá $c_{ji} = a_{ji} + a^t_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$, ver 1, Ap 2, pg 303

Así, en c_{ij} y en c_{ji} habrá el mismo valor $(a_{ij} + a_{ji})$, lo que implica que la matriz C es simétrica; de A, es decir, $C = A^s$, o sea:

$$A + A^t = A^s$$

Propiedad No 4: *La diferencia entre una matriz cuadrada y su transpuesta es una matriz antisimétrica*. Si no es cuadrada la resta no es conforme porque la transpuesta será de diferente tamaño.

$$C = A - A^t = A^{as}$$

Los valores en cada celda de C, será: $c_{ij} = a_{ij} - a^t_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$, ver 1, Ap 2, pg 303

En la celda transpuesta c_{ji} de tal matriz C habrá $c_{ji} = a_{ji} - a^t_{ji} = a_{ji} - a_{ij}$, ver 1, Ap 2, pg 303

Es decir que en c_{ij} y en c_{ji} habrá el mismo valor, pero cambiado de signo, lo que implica que la matriz C es antisimétrica u oblicua; además, obsérvese que $C = A^{as}$, o sea:

$$A - A^t = A^{as}$$

Propiedad No 5: *Toda matriz cuadrada puede expresarse como la mitad de la suma entre su matriz simétrica y su antisimétrica* (oblicua), es decir:

$$A = \frac{1}{2}(A^s + A^{as})$$

donde A^s es simétrica y A^{as} antisimétrica, ambas de A.

De acuerdo con las propiedades "3" y "4" anteriores:

$$A^s = A + A^t \quad \text{(simétrica)}$$

y

$$\underline{A^{as} = A - A^t} \quad \text{(antisimétrica)}$$

sumando se obtiene:

$$A^s + A^{as} = 2A$$

de donde:

$$A = \tfrac{1}{2}(A^s + A^{as})$$

que también puede expresarse:

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

La última expresión permite describir esta propiedad de otra manera: *Toda matriz cuadrada puede expresarse en función de ella misma y su transpuesta.*.

Observaciones:

1) Para obtener la matriz simétrica de una matriz cuadrada, súmese a esta su transpuesta (Propiedad No 3).

2) Para obtener la matriz antisimétrica u oblicua de una matriz cuadrada, réstese a esta su transpuesta (Propiedad. No 4).

3) Cualquier matriz cuadrada puede expresarse como la suma de otras dos, una igual a la mitad de su simétrica y otra igual a la mitad de su antisimétrica (Propiedad. No 5, anterior).

Propiedad No 6: *La multiplicación de un vector por una matriz es igual a la multiplicación de la transpuesta de la matriz por el vector, es decir:*

$$\mathbf{a}B = B^t\mathbf{a}$$

el producto a la izquierda del signo igual será:

$$\mathbf{a}B=[a_1 \quad a_2 \ldots \quad a_m]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11}+a_2b_{21}+\cdots a_mb_{m1} \\ a_1b_{12}+a_2b_{22}+\cdots a_mb_{m2} \\ \vdots \\ a_1b_{1n}+a_2b_{2n}+\cdots a_mb_{mn} \end{bmatrix}$$

el producto a la derecha del signo igual será

$$B^t\mathbf{a}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21}\cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22}\cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n}\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11}+a_2b_{21}+\cdots a_mb_{m1} \\ a_1b_{12}+a_2b_{22}+\cdots a_mb_{m2} \\ \vdots \\ a_1b_{1n}+a_2b_{2n}+\cdots a_mb_{mn} \end{bmatrix}$$

Como los dos resultados son iguales, la Propiedad queda probada.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES UTILIZANDO LA MATRIZ CANÓNICA

Resulta fácil comprender que la obtención de la matriz canónica (pg 39) mediante la aplicación de las operaciones elementales sobre sus líneas, partiendo de una ampliada (ecuaciones no homogéneas) o de una no ampliada (ecuaciones homogéneas) permite el cálculo inmediato de las resoluciones de un sistema de ecuaciones. La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones no homogéneo, expresado en su forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (pg 24) es igual a la matriz de coeficientes, ampliada con la columna de los elementos de $\mathbf{c}$, lo que se observa claramente en el ejemplo siguiente.

Ejemplo: Reducir a canónica la matriz de coeficientes correspondiente a la ampliada obtenida del sistema de ecuaciones mostrado en el ejemplo de la pg 09, que para mayor comodidad se reproduce a continuación; a la derecha se ilustra la matriz ampliada correspondiente:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 19 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & + & 4x_4 & = & -13 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 20 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 1 & 3 & 19 \\ 2 & 3 & -8 & 4 & -13 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & -2 & 20 \end{array}\right]$$

El cuadro siguiente muestra el orden y las operaciones elementales que se aplican a la matriz ampliada anterior (que es lo mismo que aplicarlas directamente a las ecuaciones, la ventaja es la economía de espacio y tiempo al no escribirse las incógnitas) para reducirla a canónica.

Operación No	Descripción	Operación No	Descripción
1	$L_1(1/4)$	6	$L_{43}(0.06)$
2	$L_{21}(-2)$; $L_{31}(-5)$;$L_{41}(-3)$	7	$L_4(-1/2.75)$
3	$L_2(1/4)$	8	$L_{12}(0.50)$
4	$L_{32}(-4.50)$; $L_{42}(2.50)$	9	$L_{13}(0.81)$; $L_{23}(2.13)$
5	$L_3(1/5.31)$	10	$L_{14}(-0.21)$; $L_{24}(1.60)$; $L_{34}(1.05)$

A continuación se muestran las operaciones descritas en el cuadro anterior. Con la operación No 7 se alcanza la matriz escalonada y pueden despejarse las incógnitas desde la última línea hacia arriba, a este método se denomina **Eliminación de Gauss**; al método total seguido hasta alcanzar la matriz escalonada reducida o canónica, se le denomina **Eliminación de Gauss–Jordán** y en ésta se obtienen las resoluciones directamente, sin necesidad de despejar. En las matrices equivalentes que siguen, obtenidas al aplicar las operaciones elementales indicadas, se escriben las cantidades con dos decimales (excepto cuando son enteros) con lo que lógicamente se pierde la precisión de los resultados; el resultado final es exacto porque los cálculos se hicieron con la hoja electrónica Excel, que permite muchos decimales y porque las resoluciones son números enteros, como ya se sabe.

1) $L_1(1/4)$ 2) $L_{21}(-2)$; $L_{31}(-5)$; $L_{41}(-3)$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 2 & 3 & -8 & 4 & -13 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & -2 & 20 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 4.00 & -8.50 & 2.50 & -22.50 \\ 0 & 4.50 & -4.25 & -2.75 & -20.75 \\ 0 & -2.50 & 5.25 & -4.25 & 5.75 \end{array}\right]$$

3) $L_2(1/4)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & -5.63 \\ 0 & 4.50 & -4.25 & -2.75 & -20.75 \\ 0 & -2.50 & 5.25 & -4.25 & 5.75 \end{array}\right]$$

4) $L_{32}(-4.5)$; $L_{42}(2.5)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & -5.63 \\ 0 & 0 & 5.31 & -5.56 & 4.56 \\ 0 & 0 & -0.06 & -2.69 & -8.31 \end{array}\right]$$

5) $L_3(1/5.31)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & 5.63 \\ 0 & 0 & 1 & -1.05 & 0.86 \\ 0 & 0 & -0.06 & -2.69 & -8.31 \end{array}\right]$$

6) $L_{43}(0.06)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & -5.63 \\ 0 & 0 & 1 & -1.05 & 0.86 \\ 0 & 0 & 0 & -2.75 & -8.26 \end{array}\right]$$

7) $L_4(-1/2.75)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.50 & 0.25 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & -5.63 \\ 0 & 0 & 1 & -1.05 & 0.86 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 0.50x_2 & + & 0.25x_3 & + & 0.75x_4 & = & 4.75 \\ & & x_2 & - & 2.13x_3 & + & 0.63x_4 & = & -5.63 \\ & & & & x_3 & - & 1.05x_4 & = & 0.86 \\ & & & & & & x_4 & = & 3 \end{array}$$

Multiplicando la matriz escalonada por el vector de las incógnitas, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales mostradas a la derecha, de donde pueden despejarse las incógnitas, en forma relativamente fácil, pero solamente se obtendrán resultados precisos si se incluyen en el cálculo suficientes cifras decimales. Como el cálculo se inicia por la última ecuación, que suministra directamente el valor de x_4, que substituido en la tercera ecuación, permite despejar x_3, y así sucesivamente hacia arriba, a este procedimiento se denomina **substitución en reversa**.

A continuación se continúan los cálculos hacia la obtención de la matriz canónica:

8) $L_{12}(0.5)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0.81 & 0.75 & 4.75 \\ 0 & 1 & -2.13 & 0.63 & 5.63 \\ 0 & 0 & 1 & -1.05 & 0.86 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

9) $L_{13}(0.81)$;$L_{23}(2.13)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.21 & 2.64 \\ 0 & 1 & 0 & -1.60 & -3.80 \\ 0 & 0 & 1 & -1.05 & 0.86 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

10)$L_{14}(0.21)$;$L_{24}(1.60)$;$L_{34}(1.05)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

esta matriz canónica puede plantearse en forma matricial incluyendo el vector de las incógnitas, de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 4 \\ x_4 & = & 3 \end{matrix}$$

Al efectuar la multiplicación indicada, se obtienen directamente los valores de las incógnitas, de manera más precisa que con la matriz escalonada pues las operaciones se hacen todas con la hoja de cálculo. Una consideración ordenada de la resolución de diferentes sistemas de ecuaciones se presenta en el Capítulo 2, CLASES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (pg 52)

RUTINA DE CÁLCULO

Para calcular una matriz escalonada (pg 40) o una escalonada reducida (canónica, pg 39), se presenta, a continuación, un procedimiento que aprovecha las facilidades de la hoja de cálculo **Excel**, de Microsoft, y es más rutinario que el utilizado en el tema anterior RESOLUCIÓN DE ECUACIONES UTILIZANDO LA MATRIZ CANÓNICA, pg 46. Un instrumento valiosos de dicha hoja es el comando Edición>Pegado Especial, debiendo tenerse cuidado con que este comando no funciona bien, si los valores por los que se opera una parte o toda una matriz, se encuentran dentro de dicha parte o matriz, por lo que primero deben sacarse de los mismos, pegarse en otro espacio de la hoja y luego usar el comando Copiar, antes del Edición>Pegado Especial. El procedimiento, que parte de una matriz ampliada obtenida de un sistema de ecuaciones lineales, es el siguiente:

1) Selecciónese la columna en el extremo izquierdo de la matriz ampliada (si hubiera ceros en esta columna, previamente pásense las líneas que los contienen hasta la parte de abajo de la matriz y no se tome en cuenta estas líneas en esta operación) selecciónese el comando Edición>Copiar. En una columna fuera de la matriz (se recomienda a la derecha de la misma) aplíquese Edición>Pegar y en seguida Edición>Copiar de nuevo.

2) Selecciónese toda la matriz ampliada (exceptuando las líneas con ceros que al inicio se trasladaron hasta abajo) y aplíquese Edición>Pegado Especial, elíjase la opción "dividir" y luego "Aceptar". Cada vector línea de la matriz será dividido por su valor en el extremo izquierdo, de modo que los valores en la columna al extremo izquierdo de la matriz serán todos iguales a uno.

3) Selecciónese toda la línea superior y aplíquese Edición>Copiar; selecciónese todas las líneas por debajo de la superior (no incluya en la selección, las líneas con cero en la primera columna, que antes trasladó hacia abajo) y aplíquese Edición>Pegado Especial, elíjase la opción "restar" y luego "Aceptar". El vector línea superior será restado de cada uno de los demás (por debajo de él) y la columna en el extremo izquierdo de la nueva matriz, tendrá uno en su extremo superior y ceros en las demás celdas.

4) Repítase el mismo procedimiento para la segunda columna sin tomar en cuenta la primera línea ni la primera columna. Si en cualquier momento aparece una línea con sólo ceros, trasládese al final de la matriz e ignórese totalmente su existencia para los cálculos subsiguientes. Al terminarse las columnas de la matriz de coeficientes, se tendrá una matriz de coeficientes triangular superior (pg 39).

5) Para continuar hacia la matriz **canónica** (pg 39), selecciónese el segundo vector (línea) y cópiese en una línea fuera de la matriz triangular, se recomienda debajo de la matriz. En la matriz, elíjase el valor en la línea superior a la copiada y que pertenece a la **columna directriz** (pg 39) es decir el valor sobre el uno de la línea copiada y aplíquese Edición>Copiar, luego selecciónese toda la copia de la segunda línea (pegada fuera de la matriz) y aplíquese Edición>Pegado Especial, elíjase la opción "multiplicar" y "Aceptar", el estudiante se percatará de lo que ocurre y comprenderá el procedimiento. Seleccionada la línea recién multiplicada, aplíquese Edición>Copiar y selecciónese el primer vector completo en la matriz y aplíquese Edición>Pegado Especial, opción "Restar" y "Aceptar"; ahora el valor a la derecha del uno en la primera línea será cero.

6) Repítase el paso 5 de la siguiente manera: Haga dos copias del tercer vector, en el área bajo la matriz en proceso, ya que tendrá dos valores sobre la columna directriz (sobre el uno inicial) del tercer vector línea; Selecciónense los dos valores sobre el uno de la tercera línea y luego Edición>copiar, selecciónense las dos líneas copiadas bajo la matriz y luego Edición>Pegado Especial, opción "Multiplicar" y "Aceptar"; con estas dos líneas aún seleccionadas, selecciónese Edición>copiar, selecciónense ahora las líneas primera y segunda en la matriz y Edición>Pegado Especial, opción "Restar" y "Aceptar"; ahora se tendrán dos ceros a la derecha del uno en la primera línea y un cero a la derecha del uno en la segunda línea

7) Repítase el paso seis para la matriz en proceso, hasta obtener la matriz canónica, pero cada vez haga una copia más del vector correspondiente, bajo la matriz. El resto del procedimiento es fácil de intuir al utilizarlo

Como ejercicio, el estudiante debe aplicar esta rutina a la resolución del ejemplo de la pg 46 y observar que el sistema propuesto, no obligado pero recomendable, equivale a la aplicación de las operaciones elementales empleadas en dicho ejemplo.